Université des Sciences et Technologies de Lille **2000-2001**
DEUG SM2

Interrogation écrite 3

Exercice 1 : Séries de Fourier

On considère la fonction f impaire, 2π-périodique définie sur $[0,\pi]$ par $f(x) = x(\pi - x)$.

1. Dessiner le graphe de f.
2. Ecrire le développement en séries de Fourier de f.
3. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$ (on justifiera soigneusement!).
4. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$. En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}$.

Exercice 2 : Séries entières

1. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes ::

   1. $\dfrac{x^n}{\log n}$ 2. $\dfrac{3^n z^n}{(4n)!}$
   3. $2^n z^{2n}$

2. (a) Rappeler le développement en série entière de $\arctan x$.
   (b) Donner le domaine de définition de
   $$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)(2n+1)} x^{2n+1}.$$
   (c) Calculer $f'(x)$ et la comparer au développement en série entière de $\arctan x$.
3. On considère l'équation différentielle :
   $$x(x+1)y' - y = x^2.$$
   Soit $S(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière dont on suppose qu'elle est solution de l'équation différentielle.
   (a) Montrer que $a_0 = 0$, $a_2 = 1 - a_1$, et $a_n = -a_{n-1}$ si $n \geq 3$.
   (b) On suppose en outre $S'(0) = 1$. Quelle condition cela impose-t-il sur les coefficients (a_n)? Calculer alors la valeur de tous les (a_n). En déduire une expression de S à l'aide de fonctions usuelles.