Université des Sciences et Technologies de Lille **2000-2001**
DEUG SM2

Interrogation écrite 2

Exercice 1 :

On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^3}$.

- Justifier que cette série converge.
- On souhaite avoir une valeur approchée de la somme de cette série à 10^{-3} près. Jusqu'à quel terme faut-il calculer les sommes partielles?

Exercice 2 :

Etudier la nature des séries de terme général suivant :

1. $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$
2. $\dfrac{(n+1)(n+2)}{n!}a^n$, où $a > 0$
3. $\log\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{2n+1}\right)$
4. $\log\left(\dfrac{n}{n+1}\right) - a\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$ suivant la valeur de $a \in \mathbb{R}$
5. $\log\left(\dfrac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)$

Exercice 3:

1. Montrer que la suite x_n et la série de terme général $u_n = x_n - x_{n-1}$ sont de même nature.
2. Application : Etudier la suite (x_n) définie pour $n > 0$ par :

$$x_n = \log\big((n-1)!\big) - \left(n - \frac{1}{2}\right)\log n + n.$$

3. Calculer e^{x_n}, et en déduire qu'il existe un réel positif k tel que :

$$n! \sim k\sqrt{n}e^{-n}n^n.$$

Exercice 4:

Pour $n \geq 2$, on pose $u_n = \displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^3 - x^2}$.

1. Justifier la convergence de l'intégrale définissant u_n.
2. Montrer que, pour $x \geq 2$, $\frac{x^3}{2} \geq x^2$.
3. Calculer $\displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$.
4. En déduire une majoration de u_n, et la nature de la série de terme général (u_n).