Université des Sciences et Technologies de Lille **2000-2001**
DEUG SM2

Feuille 4 : Séries entières

Exercice 1 : Rayon de convergence.

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions définies par les séries entières suivantes :

1. $\dfrac{x^n}{n!}$ 2. $n!x^n$ 3. x^n 4. $x^n \log n$

5. $\dfrac{x^n}{n^2}$ 6. $n^{\sqrt{n}}x^n$ 7. $2^n z^{2n}$ 8. $\dfrac{9^n}{n!}x^{3n-1}$

et $a_n z^n$, où $a_{2n} = 2^n$, et $a_{2n+1} = 1/2^n$.

Exercice 2 : Séries entières et prolongement de fonctions

Soit $g(x) = \dfrac{\log(1+x)}{x}$. Quel est le domaine de définition de g? Montrer que g se prolonge par continuité en 0. Montrer que la fonction ainsi prolongée est $\mathcal{C}^\infty$.
Mêmes questions avec la fonction $h(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

Exercice 3 : Somme d'une série entière

Exprimer les séries entières suvantes (dont on aura donner le rayon de convergence) à l'aide des fonctions usuelles :
a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} nx^{n-1}$.
b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} n^2x^{n-1}$.
c) $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{x^n}{(n-1)(n+2)}$.

Exercice 4 : Développement en série entière

Ecrire le développement en série entière des fonctions réelles suivantes, en précisant le rayon de convergence des séries obtenues :
a) $\arcsin(x)$.
b) $\log(1+x-2x^2)$, (on pourra factoriser $1+x-2x^2$).
c) $\displaystyle\int_0^x \cos(t^2)dt$.

Exercice 5 : Séries entières et équations différentielles

On considère l'équation différentielle suivante :

$$4xy'' + 2y' - y = 0.$$

On cherche une solution S de cette équation différentielle vérifient en outre $S(0) = 1$, et on la cherche sous la forme d'une série entière $S(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$.

1. Etablir une relation de récurrence sur les (a_n).
2. Résoudre cette relation de récurrence.
3. Sur quelle partie de $\mathbb{R}$ la fonction S ainsi définie est solution de l'équation différentielle.
4. Exprimer S à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 6 : Séries entières et équations différentielles (bis)

On considère l'équation différentielle suivante :

$$xy'' - y' + 4x^3 y = 0.$$

On cherche une solution S de cette équation différentielle sous la forme d'une série entière $S(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$.

1. Etablir une relation de récurrence sur les (a_n).
2. En déduire que $a_{4p} = \dfrac{(-1)^p}{(2p)!} a_0$, $a_{4p+2} = \dfrac{(-1)^p}{(2p+1)!} a_2$, $a_{4p+1} = a_{4p+3} = 0$.
3. En déduire l'expression de S comme combinaison linéaire de deux séries entières simples. Exprimer ces séries entières à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 7 : Une fonction non développable en séries entières.

On considère $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, définie si $x \neq 0$.

1. Etudier le prolongement par continuité de f.
2. Montrer par récurrence que si $x \neq 0$, alors :

$$f^{(n)}(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} e^{-\frac{1}{x^2}},$$

   où P et Q sont des polynômes.
3. En déduire que f est dérivable à tout ordre en 0, et donner la valeur de $f^{(n)}(0)$.
4. En déduire que f n'est pas développable en série entière en 0.