Université des Sciences et Technologies de Lille **2000-2001**
DEUG SM2

Feuille 3 : Séries numériques

Exercice 1 : Comparaison à une intégrale.

1. Dans cette question, α est un réel positif.
   (a) Soit $n \geq 1$. Montrer l'inégalité suivante (on pourra faire un dessin) :
   $$\frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{n^\alpha}.$$
   (b) Conclure que la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ (on rappelle qu'une suite croissante converge si elle est majorée).
2. Que se passe-t-il si $\alpha < 0$??
3. En suivant la même méthode, étudier la nature de :
   $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n}.$$

Exercice 2 : Jusqu'à quel terme faut-il aller?

1. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. On admet que S_n tend vers $S = \frac{\pi^2}{6}$. Donner une majoration de $|S - S_n|$. Jusqu'à quel terme faut-il aller pour avoir une valeur appochée de S à 10^{-4} près???
2. On pose $S'_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$. Justifier que cette suite converge. On admet que sa limite vaut $S' = \ln 2$.
   Jusqu'à quel terme faut-il aller pour avoir une valeur approchée de $\ln 2$ à 10^{-4} près?

Exercice 3 : Sur le lien séries/intégrales

1. Montrer que la suite (x_n) et la série de terme général $u_n = x_n - x_{n-1}$ sont de même nature.
2. Application : Etudier la suite (x_n) définie pour $n > 0$ par : $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$ et en déduire que $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ est équivalent à $\ln n$ au voisinage de l'infini.

Exercice 4 : La nature de quelques séries

Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\displaystyle\frac{(-1)^n \ln n}{n^2}$
2. $\displaystyle\frac{1}{n^\alpha}\left((n+1)^{1+1/n} - (n-1)^{1-1/n}\right)$
3. $\displaystyle\frac{n!}{n^n}$
4. $n^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n+1}}$
5. $\sqrt[3]{n^3 + an} - \sqrt{n^2 + 3}$
6. $\displaystyle\left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n$
7. $\displaystyle\left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^{n(-1)^n}$
8. $\displaystyle\frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha + (-1)^n}$

Exercice 5 : Formule de Stirling

Soit $u_n = \dfrac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!}$. Donner la nature de la série de terme général $v_n = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$. En déduire un équivalent simple de $n!$.

Exercice 6 : Produit de séries et fonction exponentielle

Soit x,y deux réels. Montrer que la série de terme général $\frac{x^n}{n!}$ converge absolument. On note $\exp(x)$ sa limite. Montrer la formule suivante :

$$\exp(x+y) = \exp(x) + \exp(y).$$