Université des Sciences et Technologies de Lille **2000-2001**
DEUG SM2

Feuille 1 : Intégrales généralisées

Exercice 1 : Quelques grands classiques

1. Etudier, suivant la valeur des paramètres éventuels, la nature des intégrales suivantes :

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\log x)^\beta} \qquad \int_0^1 \log(x)dx$$
$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^\alpha} dt \qquad .$$

2. On pose, pour $x > 0$, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.
   (a) Montrer que l'intégrale $\Gamma(x)$ converge pour tout $x > 0$.
   (b) Montrer que, pour tout $x > 0$, on a : $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Exercice 2 : Convergence, et calcul

1. Etudier, sans calcul, la convergence des intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3} \qquad J = \int_0^{1/e} \frac{1}{x} \left(\log \frac{1}{x}\right)^\alpha dx$$

2. Donner la valeur de ces intégrales.

Exercice 3 : Nature de quelques intégrales

Etudier la nature des intégrales suivantes :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} dt \qquad \int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha} dt$$
$$\int_1^{+\infty} \cos(t^2) dt \qquad \int_2^{+\infty} \frac{t}{\sqrt{t^3-1}} dt$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{e^t + t^2 e^{-t}}$$

Exercice 4 : Une intégrale convergente, non absolument convergente

1. Montrer que : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge.

2. (a) Soit $x \leq y$. Montrer que : $\left| \int_x^y \frac{\cos(2t)}{2t} \right| \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

(b) En utilisant l'inégalité $|\sin(t)| \geq \sin^2(t)$, montrer que :

$$\int_x^y \frac{|\sin(t)|}{t} dt \geq \frac{1}{2} \log\left(\frac{y}{x}\right) - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right).$$

(c) Conclure, en utilisant le critère de Cauchy, que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}$ n'est pas absolument convergente.