1. **Questions de cours**
   (a) Théorème d'interversion des limites
   (b) Dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions
   (c) Lemme d'Abel (série entière)
2. **Théorèmes de Dini**
   (a) Soit (f_n) une suite *croissante* de fonctions réelles et continues définies sur un segment $I = [a,b]$ de $\mathbb{R}$. On suppose que (f_n) converge simplement vers une fonction f *continue* sur I. Montrer que la convergence est en fait uniforme.
   (b) Soit (f_n) une suite de fonctions *croissantes*, réelles et continues définies sur un segment $I = [a,b]$ de $\mathbb{R}$. On suppose que (f_n) converge simplement vers une fonction f *continue* sur I. Montrer que la convergence est en fait uniforme.
3. **Théorème de Borel**
   (a) Soit $\varphi\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \exp(-\frac{1}{x^2})$ pour $x > 0$, et $x \mapsto 0$ pour $x \leq 0$. Montrer que $\varphi \in \mathcal{C}^\infty$, et calculer les dérivées successives en 0. Que peut-on en déduire pour φ?
   (b) En déduire l'existence de $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle que :
$$\begin{cases} |x| \geq 1 & \Longrightarrow \quad g(x) = 0 \\ |x| \leq \frac{1}{2} & \Longrightarrow \quad g(x) = 1 \\ 0 \leq g \leq 1 & \end{cases}$$
   (c) Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Montrer qu'il existe une infinité de fonctions $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = a_n$.
4. **Une fonction continue nulle part dérivable**
   (a) Montrer que : $\displaystyle\sum_{r=n+1}^{+\infty} \frac{1}{r!} \leq \frac{2}{(n+1)!}$.
   (b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall k \leq 3$, $\exists y \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\frac{\pi}{k} \leq |x-y| \leq \frac{3\pi}{k}$ et $|\sin(kx) - \sin(ky)| \geq 1$.
   (c) En déduire que $g(t) = \displaystyle\sum_{0}^{+\infty} \frac{1}{r!} \sin\left((r!)^2 t\right)$ définit une fonction continue nulle part dérivable.
5. On considère la série de fonction $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+x)}$ définie pour $x > 0$. Etudier la continuité et la dérivabilité de S. Trouver un équivalent de S en 0 et en $+\infty$. Donner un développement limité de S au voisinage de $+\infty$.
6. Soit $u_n(x) = \dfrac{x}{n^2 + x^2}$.
   (a) Etudier la convergence simple et uniforme de la série de fonctions $\sum u_n$.
   (b) Etudier la convergence simple, uniforme et normale de $\sum (-1)^n u_n$.
7. Soit $F(x) = x \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 + n^2 x^2}$.
   (a) Domaine de définition de F??
   (b) Montrer que F est $\mathcal{C}^1$ sur son domaine.
   (c) En comparant à une intégrale, calculer les limites de F quand x tend vers 0 à gauche et à droite.
8. Que dire de la limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de fonctions polynomes?

9. (a) Pour quelles valeurs (réelles) de t la série : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nt}}{1+n^2}$ est-elle convergente? On désignera désormais sa somme par f.

(b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$, indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

(c) Montrer que : $\displaystyle\lim_{+\infty} f = 0$.

(d) Montrer que $f'' + f = \dfrac{1}{1-e^{-x}}$.

(e) Soit $0 < \alpha < 1, N \in \mathbb{N}$. Montrer que, $\forall x \in]0,\alpha]$,

$$f'x) \leq \sum_{n=0}^{N} \frac{-n}{1+n^2} e^{-n\alpha} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{-ne^{-n}}{1+n^2}$$

En déduire que : $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} f'(x) = -\infty$.