1. **Questions de cours**
   (a) Lemme d'Abel
2. Soit S une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Montrer que S est analytique sur $\mathcal{D}(0,R)$, ie $\forall z_0 \in \mathcal{D}(0,R)$, $\exists (b_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} / |h| < R - |z_0| \implies S(z_0 + h) = \sum_{n \geq 0} b_n h^n$.
3. **Théorème de Tauber**
   Soit (a_n) une suite réelle telle que : $a_n = o(\frac{1}{n})$. On considère la série entière $S(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$. On suppose que $\lim\limits_{x \to 1^-} S(x) = l$ existe. Montrer que $\sum\limits_{n \geq 0} a_n = l$ (On pourra étudier $S(1 - \dfrac{1}{n}) - \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$).
4. Soit $|a| < 1$ et $\varphi_a(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \sin(a^n x)$.
   (a) Montrer que $\varphi_a \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que φ_a est développable en série entière au voisinage de 0.
   (c) En déduire, à x fixé, $\lim\limits_{a \to 1} (1 - a)\varphi_a(x)$.
5. **Théorème de Bernstein**
   (a) Soit $f :]-a,a[\to \mathbb{R}$, indéfiniment dérivable, et telle que : $\forall x \in]-a,a[$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $f^{(n)}(x) \geq 0$. Montrer que : $\forall x \in]-a,a[$, $f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.
   (b) Etendre le résultat au cas où on a seulement : $f^{(2n)}(x) \geq 0$.
   (c) Montrer que $x \mapsto \tan x$ est somme d'une série entière en 0, dont on précisera le rayon de convergence.
6. On appelle *dérangement* d'un ensemble E toute permutation de E sans points fixes (ie $\forall x \in E$, $s(x) \neq x$). On note D_n le nombre de dérangements d'un ensemble à n éléments. Calculer D_n.
7. Soit $J(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin t) dt$. Montrer que J est développable en série entière, et calculer ce développement.
8. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n n^3}{n!} = \frac{1}{e}$.
9. **Comportement asymptotique de séries entières**
   Soit $a_n \geq 0$, $\sum a_n = +\infty$, $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence 1.
   (a) Montrer que $\lim\limits_{x \to 1^-} \sum\limits_0^{+\infty} a_n x^n = +\infty$.
   (b) Soit $b_n = o(a_n)$. On pose $g(x) = \sum b_n x^n$. Etudier $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{g(x)}{f(x)}$.
   (c) Même question si on suppose que $b_n \sim_{+\infty} a_n$.
   (d) On suppose cette fois que $b_0 + \ldots + b_n \sim n$. Montrer qu'alors : $g(x) \sim_{1^-} \dfrac{1}{1 - x}$
10. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)\ln(1 + x)}{x} dx = -\frac{3}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.
11. Résoudre l'équation différentielle : $xy'' - y' + 4x^3 y = 0$.
12. Montrer que $g(x) = \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}$ est prolongeable en une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\pi,\pi[$.
13. **Théorème de Liouville et de d'Alembert**
    Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence infini.
    (a) $\forall n \in \mathbb{N}$, calculer : $\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$.
    (b) En déduire que si f est bornée, alors f est constante.
    (c) En déduire que tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ non constant admet une racine dans $\mathbb{C}$.