1. **Nombres algébriques et transcendants**
Dans cet exercice, $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que α est *algébrique* sur $\mathbb{K}$ si α est racine d'un polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$. Dans le cas contraire, α est dit *transcendant* sur $\mathbb{K}$. Par exemple, i est algébrique sur $\mathbb{Q}$ (pourquoi?).
   (a) Polynôme minimal et nombre algébrique.
   Soit α algébrique sur $\mathbb{K}$. On note $I(\alpha) = \{P \in \mathbb{K}[X], P(\alpha) = 0\}$.
      i. Montrer : $\exists! M_\alpha \in \mathbb{K}[X]$ unitaire$/I(\alpha) = \{P \in \mathbb{K}[X]/\exists Q \in \mathbb{K}[X], P = M_\alpha Q\}$. On dit que M_α est le polynôme minimal de α sur $\mathbb{K}$.
      ii. on note $\mathbb{K}[\alpha]$ l'ev sur $\mathbb{K}$ engendré par la famille de réels $1,\alpha,\dots,\alpha^q,\dots$. On rappelle que $\mathbb{K}[\alpha]$ est une $\mathbb{K}$-algèbre. Donner une base du $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{K}[\alpha]$.
      iii. Montrer que $\mathbb{K}[\alpha]$ est un corps, et que c'est le plus petit sous-corps de $\mathbb{R}$ contenant $\mathbb{K}$ et α.
      iv. Montrer que si $dim_{\mathbb{K}}\mathbb{K}[\alpha] = 2$, alors $\exists k \in \mathbb{K}/\mathbb{K}[\alpha] = \mathbb{K}[\sqrt{k}]$.
   (b) Exemples de nombres transcendants sur $\mathbb{Q}$. Soit S un polynôme de $\mathbb{Q}[X]$, de degré $n \geq 2$, irréductible sur $\mathbb{Q}$.
      i. Démontrer qu'il existe un entier naturel C_S non nul tel que pour tout rationnel $r = \frac{p}{q}$ (avec $q > 0$), il vienne : $|S(r)| \geq \frac{1}{C_S q^n}$.
      ii. Supposons que le réel α soit une racine de S. Déduire du résultat précédent l'existence d'une constante $M > 0$, telle que, pour tout rationnel $r = \frac{p}{q}$ appartenant à l'intervalle $[\alpha - 1, \alpha + 1]$, l'inégalité $|\alpha - r| \geq \frac{M}{q^n}$ ait lieu.
      iii. Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de réels définis par la relation : $t_n = \sum_{k=0}^{n} 10^{-k!}$. Démontrer que la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, et que sa limite est un nombre transcendant sur $\mathbb{Q}$.
2. **Résultant**
   (a) Soient P et Q deux polynômes non constants de $\mathbb{C}[X]$. Montrer que P et Q ont un facteur commun non constant ssi
   $$\exists A, B \in \mathbb{C}[X], A \neq 0, B \neq 0 / AP = BQ \text{ et } deg(A) < deg(Q), deg(B) < deg(P).$$
   (b) Caractériser le fait que P et Q soient premiers entre eux par la non-nullité d'un déterminant (qui s'écrit en fonction des coefficients de ce polynôme). Ce déterminant s'appelle le résultant de P et Q.
3. (a) Donner le pgcd de $X^a - 1$ et $X^b - 1$.
   (b) Soit $\mathbb{K}$ un corps fini. Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ n'ayant pas de racines dans $\mathbb{K}$.
4. (a) Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$. Montrer que P n'a que des racines simples dans $\mathbb{C}$.
   (b) i. Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ un polynôme ayant une racine $\lambda \in \mathbb{C}$ d'ordre de multiplicité $\mu > deg(P)/2$. Montrer que $\lambda \in \mathbb{Q}$.
      ii. Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$, $deg(P) = 2n + 1$ avec $n \geq 2$, tel que P admette une racine d'ordre n. Montrer que P admet une racine dans $\mathbb{Q}$.

5. **Lemme de Gauss et critère d'Eisenstein**
   (a) i. Soient $P,Q \in \mathbb{Z}[X]$, et p un nombre premier. On suppose que p divise tous les coefficients du produit PQ. Montrer que p divise tous les coefficients de P ou tous les coefficients de Q.
   ii. (Lemme de Gauss). Si $P \in \mathbb{Z}[X]$, on note $c(P)$ le pgcd des coefficients de P. Montrer que si $P,Q \in \mathbb{Z}[X]$, alors $c(PQ) = c(P)c(Q)$.
   (b) Montrer que si $\phi \in \mathbb{Z}[X]$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$, il est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.
   (c) i. (Critère d'Eisenstein). Soit $P = a_n X^n + \ldots + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$. On suppose qu'il existe un nombre premier p tel que :
   $$\forall k, 0 \leq k \leq n-1, p | a_k, \quad p \nmid a_n, \quad p^2 \nmid a_0.$$
   Montrer que P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.
   ii. (Application). Montrer que $X^{p-1} + \ldots + 1$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.
6. **Localisation de racines d'un polynôme**
   cf notamment FG p224.