1. **Questions de cours**
   (a) Formule de Taylor avec reste intégral
   (b) Continuité et dérivabilité d'une intégrale dépendant d'un paramètre
   (c) Sommes de Riemann d'une fonction continue
2. Soit $\sum u_n$ une série réelle semi-convergente (ie convergente sans être absolument convergente). Soit $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Montrer qu'il existe une permutation $\varphi\ :\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\sum u_{\varphi(n)}$ converge vers l.
3. Faire un développement asymptotique à l'ordre 3 des nombres harmoniques $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$.
4. **Inégalité de Jensen**
   Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe continue, $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Comparer $\int_0^1 \varphi(f(t))dt$ et $\varphi(\int_0^1 f(t)dt)$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{C}^0([a,b[,\mathbb{R})$ telle que : $\forall k \in \mathbb{N},\ k \leq n$, on ait : $\int_a^b t^k f(t)dt = 0$. Montrer que f admet au moins $n+1$ zéros sur $]a,b[$.
6. **Lemme d'Hadamard**
   Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On définit g par : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $g(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x}$, $g(0) = f'(0)$. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et préciser les dérivéees successives en 0.
7. Pour tout $a \in]-1, +\infty[$, calculer :
   $$F(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1 + a\cos x)}{\cos x} dx.$$
8. **Irrationnalité de π^2**
   (a) Soit $g\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction polynôme à coefficients entiers. On considère la fonction polynôme $h : x \mapsto \frac{x^n g(x)}{n!}$. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $h^{(k)}(0)$ est entier.
   (b) On suppose que π^2 est rationnel, ie $\pi^2 = a/b$, où a et b sont des entiers. On pose :
   $$f_n :\ \begin{array}{rcl} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x^n(1-x)^n}{n!} \end{array}.$$
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $I_n = \pi a^n \int_0^1 f_n(x)\sin(\pi x)dx$ est un entier. Conclure.
9. **Etude d'une fonction définie par une intégrale**
   On pose $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$.
   - Domaine de définition de f?
   - Dérivée de f, sens de variation.
   - Etude au voisinage du point 1 : continuité? dérivabilité?
   - Même étude en 0.
   - Limite de f en $+\infty$.
   - Graphe de la fonction f.

10. **Théorème de Weierstrass : une preuve par la convolution**
On note $\mathcal{E}$ l'ev des fonction continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et nulles en dehors d'un compact. On munit $\mathcal{E}$ du produit de convolution $\star$ en définissant, pour tout $(f,g) \in \mathcal{E}^2$ la *convolée* :

$$f \star g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt \end{array}$$

(on pourra remarquer que l'intégrale est en fait à borne finies)

(a) Montrer que la loi $\star$ est commutative, et distributive par rapport à l'addition.

(b) Que dire de la régularité de $f \star g$ si :
- f et g sont continues.
- Une des deux fonctions est continue, et l'autre est $\mathcal{C}^k$.

(c) On appelle *approximation de l'identité* toute suite (χ_n) de fonctions de $\mathcal{E}$ positives vérifiant :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \chi_n(t)dt = 1, \text{ et } \forall \alpha > 0 \lim_{n \to +\infty} \int_{|t|>\alpha} \chi_n(t)dt = 0.$$

Soit $f \in \mathcal{E}$. Montrer que la suite de fonctions $(f \star \chi_n)$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

(d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$a_n = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n dt, \quad p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ t \mapsto \begin{cases} (1-t^2)^n/a_n & \text{si } |t| < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que p_n est une approximation de l'identité. Montrer que si f est nulle en dehors de $I = [-1/2,1/2]$, $f \star p_n$ est une fonction polynôme sur I.

(e) En déduire le théorème de Weierstrass : si J est un segment de $\mathbb{R}$ et si $f : J \to \mathbb{R}$ est continue, alors f est limite uniforme sur J d'une suite de fonctions polynômes.

(f) Application : Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, telle que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 f(t)t^n dt = 0$. Montrer que f est la fonction nulle.

(g) Que dire d'une fonction f qui serait limite uniforme d'une suite de fonctions polynômes sur $\mathbb{R}$.