1. **Questions de cours**
   (a) Théorème de Rolle
   (b) Inégalité de Hölder
   (c) Sommation des relations de comparaison
2. Soit (u_n) une suite vérifiant :
$$u_0 \in]0,\frac{\pi}{2}] \ , \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sin(u_n).$$
   Etudier la convergence de (u_n), et en donner un équivalent asymptotique à deux termes.
3. **Algorithme de trichotomie**
   Soit $I = [a,b]$, $c < d \in]a,b]$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer que la connaissance de $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$, $f(d)$ permet d'affirmer que f atteint son minimum en un segment $J \subsetneq I$ que l'on précisera. En déduire un algorithme pour trouver le minimum d'une fonction convexe.
4. Soit $P(X) = a_0 + \ldots + a_n X^n$, $Q(X)$ deux polynômes scindés sur $\mathbb{R}$. Montrer que $a_0 Q + \ldots + a_n Q^{(n)}$ est scindé sur $\mathbb{R}$.
5. Soit $u_n = \frac{n.n!}{(\alpha+1)\ldots(\alpha+n)}$. Montrer que $\sum u_n$ converge ssi $\alpha > 2$.
6. **Polynômes lacunaires**
   Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$,$P = a_n X^n + \ldots + a_0$.
   (a) Montrer que si P a r racines réelles (comptées avec leur multiplicité), alors P' a au moins $(r-1)$ racines réelles. Que dire si P est scindé?
   (b) On suppose : $\exists p \geq 1 / a_{n-1} = \ldots = a_{n-p} = 0$, $a_{n-p-1} \neq 0$ (on dit que P présente une *lacune* d'ordre p). On suppose en outre que P est unitaire. montre que :
   - Si p est pair, P admet au plus $n-p$ racines réelles (comptées avec leur multiplicité).
   - Si p est impair et $a_{n-p-1} > 0$, P admet au plus $n-p-1$ racines réelles (comptées avec leur multiplicité).
   - Si p est impair et $a_{n-p-1} < 0$, P admet au plus $n-p+1$ racines réelles (comptées avec leur multiplicité).
7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad C^2$. On suppose f et f'' bornées. Montrer que $\|f'\|_\infty \leq \sqrt{2}\sqrt{\|f\|_\infty \|f''\|_\infty}$.
8. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.
   (a) Montrer que $l = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ existe.
   (b) On suppose que $l \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) - lx$ existe.
9. Soit (u_n) une suite décroissante qui converge vers 0. Montrer que les séries de termes généraux u_n et $n(u_n - u_{n+1})$ sont de même nature. Comparer leur somme dans le cas de la convergence.
10. Soit $\sum u_n$ une série réelle positive, $u_0 > 0$. Etudier les séries $\sum v_n$ et $\sum w_n$ où :
$$v_n = \frac{u_n}{s_n}, \quad w_n = \frac{u_n}{(s_n)^\alpha}, \quad \text{avec } s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \quad \text{et } \alpha \in \mathbb{R}.$$