1. **Questions de cours**
   (a) Caractérisation des points d'adhérence à l'aide des suites convergentes.
   (b) Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$.
   (c) L'espace des fonctions bornées sur un ensemble à valeurs dans un Banach est un Banach pour la norme de la convergence uniforme.
2. Montrer que, si $u_n = \sqrt{n} - [\sqrt{n}]$ pour tout $n \geq 1$, alors l'ensemble $\{u_n, n \geq 1\}$ est dense dans $[0,1]$.
3. Soit $(E, \|.\|)$ un espace de Banach. Montrer que, si $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de boules fermées décroissante pour l'inclusion, alors $\bigcap_n B_n$ est une boule fermée.
4. **Convexes d'un evn**
   Soit C une partie convexe d'un $\mathbb{R}$-evn E.
   (a) Montrer que son intérieur et son adhérence sont convexes. Montrer que l'intérieur de $\overline{C}$ est égal à l'intérieur de C. A quoi est égal l'adhérence de l'intérieur de C? Montrer que la frontière de C est d'intérieur vide. Si $\varepsilon > 0$ et $C_\varepsilon = \{x \in E | d(x,C) \leq \varepsilon\}$, montrer que C_ε est fermé convexe.
   (b) On suppose $O_E \in Int(C)$. Montrer que $Int(C) = \bigcup_{t\in]0,1[} tC$ et $\overline{C} = \bigcap_{t\in]1,+\infty[} tC$.
5. On se propose déterminer $S = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 | x^2 - 2y^2 = 1\}$.
   (a) Montrer que $G = \{z \in \mathbb{R} | z > 0 \ et \ \exists (x,y) \in S, z = x + y\sqrt{2}\}$ est un sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{R}^*$. Montrer que les éléments de G supérieurs à 1 vérifient $x \geq 0$ et $y \geq 0$.
   (b) En déduire G puis S.
6. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels > 0, telle que $\sum_n a_n$ converge. Pour $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, on pose, $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite de $[0,1]$: $N(f) = \sum_n a_n |f(t_n)|$. A quelle conditon N est-elle une norme? La comparer à la norme de la convergence uniforme.
7. Soit E l'espace des fonctions réelles bornées sur $[0,1]$ muni de $\|f\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f|$. Si A est une partie non vide de $[0,1]$ et $X = \{f \in E | f|_A = 0\}$, montrer que X est égal à sa frontière.
8. Dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé, $\mathcal{D}$ est une droite de pente irrationnelle. Déterminer la distance de $\mathcal{D}$ à l'ensemble des points à coordonnées des entiers relatifs.
9. **Théorème de Baire**
   Soit (U_n) une suite de parties ouvertes de $\mathbb{R}$, telles que pour tout n, U_n soit dense dans $\mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble $D = \bigcap_{n\geq 0} U_n$ est aussi dense dans $\mathbb{R}$. A quel type d'espace vectoriel normé peut-on généraliser ce résultat?
   En déduire que $\mathbb{R}$ ne peut être la réunion d'une suite de fermés d'intérieur vide.
10. Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Est-ce vrai sur $\mathbb{R}$?
11. **Espace de suites**
   (a) Soit $c_0 = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \lim_{n\to+\infty} u_n = 0\}$, muni de $\|.\|_\infty$. Montrer qu'il s'agit d'une norme sur c_0 qui en fait un espace de Banach.
   (b) Soit $l_1 = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \sum_{n=0}^{\infty} |u_n| < \infty\}$, muni de $\|.\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$. Montrer qu'il s'agit d'une norme sur l_1 qui en fait un espace de Banach.