Dualité

1. **Tout endomorphisme est somme de deux automorphismes**
   Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n (on supposera la caractéristique de $\mathbb{K}$ différente de 2)
   (a) Soit u,$v \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $rg(u \circ v) \geq rg(u) + rg(v) - n$.
   (b) Soit $(e_1,...,e_n)$ (resp.$(\phi_1,...,\phi_n)$) une famille de vecteurs de E (resp. E^*).On définit $f \in \mathcal{L}(E)$ par : $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x)e_i$.
   Montrer que $rg(f) + n \geq rg(e_1,...,e_n) + rg(\phi_1,...,\phi_n)$.
   (c) Soit $(e_1,...,e_r)$ (resp.$\phi_1,...,\phi_r$) une famille libre de vecteurs de E (resp. E^*).On définit $f \in \mathcal{L}(E)$ par : $f(x) = \sum_{i=1}^{r} \phi_i(x)e_i$.
   Quel est le rang de f?
   (d) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $rg(u) = q$, $(e_1,...,e_q)$ base de $Im\ u$.
   Montrer qu'il existe q formes linéaires $\phi_1,...,\phi_q / \forall x \in E, u(x) = \sum_{i=1}^{q} \phi_i(x)e_i$.
   Que dire de $(\phi_1,...,\phi_q)$??
   (e) Montrer que tout endomorphisme est somme de deux automorphismes.
2. **Formes linéaires sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$**
   (a) Soit $f \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})^*$. Montrer : $\exists A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) / \forall X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), f(X) = Tr(AX)$.
   (b) Déterminer les éléments $f \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})^* / \forall X,Y \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), f(XY) = f(YX)$.
3. **Dualité,polynômes et intégration**
   Soit $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & \int_1^{-1} \frac{P(t)}{1+t^2}dt \end{array}$
   (a) Soient $x_0,...,x_n$ n+1 réels distincts.
   Montrer : $\exists \lambda_0,...,\lambda_n \in \mathbb{R} / \forall P \in \mathbb{R}_n[X], \phi(P) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P(x_i)$. Donner une méthode pour calculer les λ_i.
   (b) On suppose n=2k+1 impair.
   Montrer : $\exists x_1,...,x_n \in \mathbb{R}, \exists \lambda_1,...,\lambda_n \in \mathbb{R} / \forall P \in \mathbb{R}_n[X], \phi(P) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(x_i)$.