1. **Questions de cours**
   (a) Caractérisation des points d'adhérence à l'aide des suites convergentes.
   (b) Théorème du point fixe.
   (c) L'espace des fonctions continues sur un compact à valeurs dans un Banach est un Banach pour la norme de la convergence uniforme.
   (d) Continuité et image réciproque.
2. Montrer que, si $u_n = \sqrt{n} - [\sqrt{n}]$ pour tout $n \geq 1$, alors l'ensemble $\{u_n, n \geq 1\}$ est dense dans $[0,1]$.
3. Soit $(E, \|.\|)$ un espace de Banach. Montrer que, si $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de boules fermées décroissante pour l'inclusion, alors $\bigcap_n B_n$ est une boule fermée.
4. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels > 0, telle que $\sum_n a_n$ converge. Pour $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, on pose, $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite de $[0,1]$: $N(f) = \sum_n a_n |f(t_n)|$. A quelle conditon N est-elle une norme? La comparer à la norme de la convergence uniforme.
5. Soit E l'espace des fonctions réelles bornées sur $[0,1]$ muni de $\|f\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f|$. Si A est une partie non vide de $[0,1]$ et $X = \{f \in E | f|_A = 0\}$, montrer que X est égal à sa frontière.
6. Dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé, $\mathcal{D}$ est une droite de pente irrationnelle. Déterminer la distance de $\mathcal{D}$ à l'ensemble des points à coordonnées des entiers relatifs.
7. **Théorème de Baire**
   Soit (U_n) une suite de parties ouvertes de $\mathbb{R}$, telles que pour tout n, U_n soit dense dans $\mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble $D = \bigcap\limits_{n\geq 0} U_n$ est aussi dense dans $\mathbb{R}$. A quel type d'espace vectoriel normé peut-on généraliser ce résultat?
   En déduire que $\mathbb{R}$ ne peut être la réunion d'une suite de fermés d'intérieur vide.
8. **Espace de suites**
   (a) Soit $l^1 = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \sum\limits_{n=0}^{\infty} |u_n| < \infty\}$, muni de $\|.\|_1 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} |u_n|$. Montrer que cette norme en fait un espace de Banach.
   (b) Soit $l^\infty = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \|u_n\|_\infty < \infty\}$ normé par $\|.\|_\infty$. Montrer que l'application : $\phi : \begin{array}{ccc} l^\infty & \to & (l^1)' \\ u & \mapsto & \phi_u \end{array}$ où $\phi_u(v) = \sum u_k v_k$. Montrer que ϕ est linéaire, continue, isométrique, surjective.
9. Soit $E = \mathcal{C}^0_{\mathcal{B}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Montrer :
$$\exists \alpha \in E \mid \forall t \in \mathbb{R},\ \alpha(t) = \int_t^{t+1} \frac{\alpha(u)}{2} du + \tanh(t)$$
10. Soit f une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Montrer :
    $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid \forall x \in \mathbb{R}\ ,\ |f(x)| \leq a|x| + b$.
11. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que f admet des limites finies en l'infini. Montrer que f est en fait uniformément continu.
12. Montrer $\exists ! (x,y) \in \mathbb{R}^2\ x = \frac{1}{4}\sin(x+y)$ et $y = \frac{1}{3}\arctan(x-y)$.
13. **Deux résultats de point fixe**
    (a) Soit E un espace complet, et $f : E \to E$. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^p = f \circ f \circ \ldots \circ f$ (p fois) soit contractante. Montrer que f a un point fixe unique.
    (b) Soit X un autre espace et une application $F : \begin{array}{ccc} X * E & \to & E \\ (\lambda,x) & \mapsto & F(\lambda,x) \end{array}$, continue et k-contractante en la seconde variable, ie :
$$\exists k \in]0,1[,\ \forall \lambda \in X,\ \forall (x,y) \in E^2,\ \|F(\lambda,x) - F(\lambda,y)\| \leq k\|x-y\|.$$
    Montrer que pour tout $\lambda \in X$, l'application $F(\lambda,.) : x \mapsto F(\lambda,x)$ admet un unique point fixe que l'on note x_λ. Montrer ensuite que l'application $X \to E$, $\lambda \mapsto x_\lambda$ est continue.